• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 55

Φροντιστήριο
Εν δυνάμει
www.en-dynamei.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 6 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α) **i)** Απόδειξη 1, σχολικό βιβλίο, σελ. 60
ii) Απόδειξη 2, σχολικό βιβλίο, σελ. 60

Β) **i)** Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 31
ii) Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 33
iii Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 36

Γ) **1.** ΛΑΘΟΣ **2.** ΛΑΘΟΣ **3.** ΣΩΣΤΟ **4.** ΛΑΘΟΣ **5.** ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2^{Ο}

Α) Πρέπει $|2\lambda-9|-3<0 \Leftrightarrow |2\lambda-9|<3 \Leftrightarrow -3<2\lambda-9<3 \Leftrightarrow 6<2\lambda<12 \Leftrightarrow \boxed{3<\lambda<6}$.

Β)

i) Έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^3-9x}$.

Πρέπει $x^3-9x\neq 0 \Rightarrow x(x^2-9)\neq 0 \Rightarrow x(x-3)(x+3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 0 \;\textit{και}\; x\neq 3 \;\textit{και}\; x\neq -3$.

Άρα $\mathrm{A}_f=\mathbb{R}-\{-3,0,3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$.

Για κάθε $x\in \mathrm{A}_f$ και το $-x\in \mathrm{A}_f$, οπότε:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+|-x|}{(-x)^3-9\cdot(-x)}=\frac{x^2+|x|}{-x^3+9x}=-\frac{x^2+|x|}{x^3-9x}=-f(x)\text{, άρα η } \boxed{f:\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}.$$

ii) Έχουμε $g(x)=\dfrac{2|x|-3}{\sqrt{25-x^2}}$.

Πρέπει $25-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<25 \Leftrightarrow |x|<5 \Leftrightarrow -5<x<5$, άρα $\mathrm{A}_g=(-5,5)$.

Για κάθε $x\in \mathrm{A}_g$ και το $-x\in \mathrm{A}_g$, οπότε:

$$g(-x)=\frac{|-x+1|+|-x-1|}{\sqrt{25-(-x)^2}}=\frac{|x-1|+|x+1|}{\sqrt{25-x^2}}=g(x)\text{, άρα η } \boxed{g:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}$$

Γ) Έχουμε $\varphi(x)=2x^2-4x+7,\; x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$f(x)=\varphi(x-4)+5=2(x-4)^2-4(x-4)+7+5=2(x^2-8x+16)-4x+16+12=2x^2-16x+32-4x+28 \Leftrightarrow$

$\boxed{f(x)=2x^2-20x+60}$

ΘΕΜΑ 3^{O}

A) $\bullet \eta\mu\frac{10\pi}{3}=\eta\mu\frac{9\pi+\pi}{3}=\eta\mu\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\bullet \varepsilon\varphi\frac{37\pi}{6}=\varepsilon\varphi\frac{36\pi+\pi}{6}=\varepsilon\varphi\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\bullet \sigma\upsilon\nu\frac{34\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\frac{33\pi+\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

$\bullet \sigma\varphi\frac{49\pi}{4}=\sigma\varphi\frac{48\pi+\pi}{4}=\sigma\varphi\left(12\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi\frac{\pi}{4}=1$

Άρα $\mathrm{A}=\eta\mu\frac{10\pi}{3}\cdot\varepsilon\varphi\frac{37\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\frac{34\pi}{3}\cdot\sigma\varphi\frac{49\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=-\frac{3}{6}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\boxed{\mathrm{A}=0}$.

B) Έχουμε ότι: $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, οπότε η γωνία x ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο. Άρα $\eta\mu x<0$, $\sigma\upsilon\nu x<0$.

i) Για την εξίσωση $6\eta\mu^2 x+\eta\mu x-1=0$, θέτουμε $\eta\mu x=\omega$, οπότε γίνεται:

$6\omega^2+\omega-1=0$. Είναι $\Delta=25$

άρα $\omega_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{12}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=\frac{1}{3}\Rightarrow\eta\mu x=\frac{1}{3}\\ \omega_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\eta\mu x=-\frac{1}{2}\end{cases}\overset{\eta\mu x<0}{\Rightarrow}\boxed{\eta\mu x=-\frac{1}{2}}$

ii) $\bullet \sigma\upsilon\nu^2 x=1-\eta\mu^2 x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\overset{\sigma\upsilon\nu x<0}{\Leftrightarrow}\boxed{\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

$\bullet \varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\boxed{\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\bullet \sigma\varphi x=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\Leftrightarrow\boxed{\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}}$

Γ)

$$\bullet \eta\mu\left(-\frac{17\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\left(-\frac{16\pi+\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\left(-8\pi-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\bullet \sigma\upsilon\nu\left(\frac{45\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{44\pi+\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(22\pi+\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\eta\mu\omega$$

$$\bullet \sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\left(\frac{20\pi+\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$$

$$\bullet \varepsilon\varphi\left(\frac{63\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{64\pi-\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(32\pi-\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega$$

Άρα $\mathrm{B}=\dfrac{(-\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(-\eta\mu\omega)^2}{\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega}{1}\Leftrightarrow\boxed{\mathrm{B}=1}$.

ΘΕΜΑ 4$^{\mathrm{O}}$

Α)

i)

$$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta+1}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta}=\frac{1+2\sigma\upsilon\nu\theta+1}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta}=$$

$$=\frac{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta}=\frac{2\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta}=\frac{2}{\eta\mu\theta}$$

ii)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\frac{\eta\mu x}{\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}+\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}-\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$$

Β) Ισχύει ότι: $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\pi}{2}$, $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \ \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ (1).

Έχουμε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{4}{3}\Rightarrow\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{16}{9}\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+2\mathrm{K}=\frac{16}{9}\Rightarrow1+2\mathrm{K}=\frac{16}{9}\Rightarrow2\mathrm{K}=\frac{7}{9}\Rightarrow\boxed{\mathrm{K}=\frac{7}{18}}.$$

Γ)

i) Αφού η f είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x \in \mathrm{A}$ και το $-x \in \mathrm{A}$, οπότε το Α θα πρέπει να είναι σύνολο συμμετρικό γύρω από το μηδέν.

Άρα θα πρέπει: $6-3\alpha=-(4\alpha-\alpha^2) \Leftrightarrow 6-3\alpha=-4\alpha+\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-6=0 \Leftrightarrow \alpha=3 \text{ ή } \alpha=-2$.

Αν $\alpha=3$, τότε $\mathrm{A}=\left[4\alpha-\alpha^2, 6-3\alpha\right]=[3,-3]$. Απορρίπτεται.

Αν $\alpha=-2$, τότε $\mathrm{A}=\left[4\alpha-\alpha^2, 6-3\alpha\right]=[-12,12]$. Δεκτό.

Άρα $\boxed{\alpha=-2}$

ii) Αφού η f είναι περιττή, τότε για κάθε $x \in [-12,12]$ ισχύει $f(-x)=-f(x)$ (1).

- Θέτουμε στην σχέση (1), x = 0, οπότε θα έχουμε: $f(0)=-f(0) \Leftrightarrow 2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

- Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(2,-4)$, τότε $f(2)=-4$. Άρα $f(-2)\overset{(1)}{=}-f(2)=4$.

- Επίσης: $f\left(-\sqrt{32}\right)=f\left(-\sqrt{16\cdot 2}\right)=f\left(-4\sqrt{2}\right)\overset{(1)}{=}-f(4\sqrt{2})$

Επομένως: $\Lambda=\sqrt{f(-2)+f(0)+f(-\sqrt{32})+f(4\sqrt{2})}=\sqrt{4+0-f(4\sqrt{2})+f(4\sqrt{2})}=\sqrt{4} \Leftrightarrow \boxed{\Lambda=2}$